UNIVERSITE MOHAMMED V

Faculté des sciences, Rabat

Année 2014-15

Module : Analyse 3

Filière SMP

Série #4

Exercice I. Déterminer le centre et le rayon de convergence des séries suivantes :

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+3i}{5-i}\right)^n (z+\pi i)^n$.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(z-3+2i)^n$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n}$.

2) Si R est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{3n}$.

Exercice II. Déterminer la série de Laurent de centre 0 des fonctions suivantes :

(2-1)

a) $f(z) = \frac{-2z+3}{z^2-3z+2}$;

b) $\frac{1}{z}$ $z_0 = 1$;

c) $z^3 \cosh(\frac{1}{z})$ $z_0 = 0$.

Exercice III. Déterminer les points singuliers des fonctions suivantes et leurs résidus.

a) $\frac{\cos(z)}{(z)^6}$; b) $\frac{z^2+1}{z^4-1}$; c) $\frac{1}{\cos(z)}$.

ExerciceIV. En utilisant les résidus, calculer les intégrales suivantes :

a) $\oint_C \frac{\sin(\pi z)}{z^4}$ $C : |z-i| = 2$;

b) $\oint_C \frac{\cosh(z)}{z^2-3iz}$, $C : |z| = 1$.

c) $\oint_C \frac{1-4z+6z^2}{(z^2+\frac{1}{4})(2-z)}$; $C : |z| = \frac{3}{2}$.

Exercice V. Déterminer le développement en série de Fourier

de la fonction périodique:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2. \end{cases}$$

En déduire la somme de la série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots\ldots\ldots$

Module Analyse 3

Série #4 Indications

Exercice I. a) $\sqrt{2}\,;-\pi i$, b) $1;3-2i$, c) $\infty, 0$.

Exercice II. a) Déterminer la série de Laurent de centre 0 des fonctions suivantes :

$$\text{a)}\, f(z) = \frac{-2z+3}{z^2-3z+2}.$$

a) On a $f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$, de plus

(1) $-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ si $|z| < 1$, (2) $-\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$ si $|z| > 1$.
(3) $-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$ si $|z| < 2$, (4) $-\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$ si $|z| > 2$.

Donc si $|z| < 1$, (1) et (3) sont vérifiés : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \frac{1}{2^{n+1}}) z^n$.

Si $1 < |z| < 2$, (2) et(3) sont vérifiés : $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} z + \ldots\ldots - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \ldots.$

Si $|z| > 2$, (2) et(4) sont vérifiés : $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1+2^n}{z^{n+1}}) = -\frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} - \ldots.$

b) $\frac{1}{z}$ $\quad z_0 = 1$;

$Z = z - 1$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+Z} = \sum (-1)^n Z^n, \quad |Z| < 1 = R$$

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-z)^n, \quad |z-1| < 1$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{Z^{n+1}}, \quad |Z| > 1$$

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-z)^{n+1}}, \quad |z-1| > 1$$

c) $z^3 \cosh(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!z^{2n-3}} = z^3 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{(4)!z} + \frac{1}{(6)!z^3} + \ldots.$; $R = \infty$.

Exercice III. Déterminer les points singuliers des fonctions suivantes et leurs résidus.

$$\text{a)}\ \frac{\cos(z)}{(z)^6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n-6}$$

$z = 0$; résidus= 0.

; b) $\frac{z^2+1}{z^4-1}$.

Les nombres complexes $z = \pm i$ sont des singularités apparentes ou de fausses singularités,

$$R_{z=\pm i}(\frac{z^2+1}{z^4-1}) = 0$$

Les nombres complexes $z = \pm 1$ sont des singularités isolés et sont des pôles simples :

$$R_{z=1}(\frac{z^2+1}{z^4-1}) = \frac{1}{2}, \ R_{z=-1}(\frac{z^2+1}{z^4-1}) = -\frac{1}{2}$$

c) $\frac{1}{\cos(z)}$.

$z_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ pôle simple

Résidus$=\lim_{z\to z_n} \frac{z-z_n}{\cos(z)} = \frac{-1}{\sin(z_n)} = (-1)^{n+1}$.

Exercice IV. En utilisant les résidus, calculer les intégrales suivantes :

a) $\oint_C \frac{\sin(\pi z)}{z^4} dz \quad C : |z-i| = 2;$

$$\frac{\sin(\pi z)}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1!}(\pi z)^{2n+1}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1!}(\pi z)^{2n-3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{z^3} - \frac{\pi^3}{6z} + \ldots.$$

Le point $z = 0$ est un pôle d'ordre 3 entouré par la courbe:

$$Res_{z=0}\left(\frac{\sin(\pi z)}{z^4}\right) = -\frac{\pi^3}{6}$$

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z)}{z^4} = -\frac{i\pi^4}{3}.$$

b) $\oint_C \frac{\cosh(z)}{z^2-3iz}, \quad C : |z| = 1.$

$$\frac{\cosh(z)}{z^2-3iz} = \frac{\cosh(z)}{z(z-3i)},$$

La fonction admet un pôle simples au point $z = 0$ entouré par C,
La fonction admet pôle simple au point $z = 3i$ non entouré par C.

$$Rés_{z=0} = \left[\frac{\cosh(z)}{(z-3i)}\right]_{z=0} = \frac{i}{3}.$$

Donc, on a $\oint_C \frac{\cosh(z)}{z^2-3iz} = -\frac{2\pi}{3}$.

c) $\oint_C \frac{1-4z+6z^2}{(z^2+\frac{1}{4})(2-z)}; C : |z| = 1.$

La fonction admet des pôle simples au point $z = \pm i\frac{1}{2}$ entouré par C,
La fonction admet un pôle simple au point $z = 2$ non entouré par C.

$$Res_{z=\frac{i}{2}} = \left[\frac{1-4z+6z^2}{(z^2+\frac{1}{4})(2-z)}\right]_{z=0} = -1, Re\,s_{z=-\frac{i}{2}} = \left[\frac{1-4z+6z^2}{(z^2+\frac{1}{4})(2-z)}\right]_{z=0} = -1.$$

$$\oint_C \frac{1-4z+6z^2}{(z^2+\frac{1}{4})(2-z)} dz = -4\pi i. = 2\pi i(-1-1).$$

Exercice V. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction périodique:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}x) + \frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi}{2}x) + \frac{1}{7}\sin(\frac{7\pi}{2}x) + \ldots\ldots\right.$$

En déduire la somme de la série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots\ldots\ldots$

$x = 1, \quad f(1) = 1 = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots\ldots\ldots)$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$